

Exercices de mathématiques

Classe Préparatoire Intégrée de la Gendarmerie Nationale
2023

Vincent Giraud

Toutes les solutions aux questions se trouvent à partir de la page 7.



Ce contenu est sous licence CC BY-SA 4.0.
Pour obtenir une copie de cette licence, visitez
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.fr>

Exercices

Opérations entre matrices

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} -5 & 31 \\ 18 & -29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -77 & -41 \\ 17 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} -4,5 \\ 18,6 \\ -1,8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -77 \\ 15,2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } [11] - [-9]$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} -65 & 94 & -2 & 22 \\ 18 & -18 & 0 & 47 \\ -14 & 76 & -87 & 38 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 44 & -13 & -7 & 64 \\ 37 & 78 & -5 & 51 \\ -87 & 31 & 42 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{f) } \begin{bmatrix} 110 & -48 & 70 \\ 19 & 31 & -62 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 58 & 92 \\ -73 & -61 \end{bmatrix}$$

$$\text{g) } \begin{bmatrix} 66 \\ -32 \\ -5 \end{bmatrix} - [-88 \quad -17 \quad -41]$$

$$\text{h) } \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{i) } \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2,5 \\ 0,5 \\ -1,5 \end{bmatrix}$$

$$\text{j) } \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & -17 & -10 \\ 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{k) } \begin{bmatrix} 73 & 0 \\ 0 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Déterminants

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} -1 & -16 & -1 \\ 2 & 32 & 2 \\ -25 & -2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} 15 & 1 & 1 \\ 2 & 52 & -1 \\ 1 & 1 & -13 \end{vmatrix}$$

$$\text{f) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & 47 \\ 9 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\text{g) } \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\text{h) } \begin{vmatrix} -6,433 & -9,921 & 4,895 \\ 7,616 & -6,441 & -5,373 \\ 2,959 & -0,254 & -3,761 \end{vmatrix}$$

$$\text{i) } \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & -15 \\ -4 & 1 & -1 & -6 \\ -1 & 5 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{j) } \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ -7 & -1 & 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{k) } \begin{vmatrix} -1 & 2 & -44 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Inversions de matrices

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\text{b) } [1]^{-1}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -2 & 11 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} -2 & -9 & -13 \\ -5 & 2 & -8 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\text{f) } \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\text{g) } \begin{bmatrix} -7 & -9 & 28 & -84 \\ 4 & 5 & -16 & 48 \\ -3 & -4 & 13 & -40 \\ 1 & -2 & -5 & 17 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\text{h) } \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\text{i) } \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Opérations entre polynômes

$$\text{a) } (x^5 + 3x^4 - x^3 + 111x^2 - 3x + 1) + (x^4 - 5x^3 + x)$$

$$\text{b) } (-42x^5 - x^4 + x^3 + 31x^2 + 8x - 1) - (-x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x)$$

$$\text{c) } (x^2 - 3x) \times (2x^2 + x - 4)$$

$$\text{d) } (x^4 - 10x + 1)/(x^2 + 1)$$

$$\text{e) } (-34x^6 - 3x^5 - 27x^3 + 2x^2 + 2x + 2)/(-x^4 - 2x^3 + x^2 + 6x)$$

f) $(-2x^3 - 6)/(-x^5 - 4x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 28)$

g) $(3x^6 + x^5 + 2x^4 + 12x^3 - x^2 - 2x - 1)/(x - 4)$

Décompositions en Éléments Simples

a) Décomposition en Éléments Simples de $\frac{-2x + 1}{(x - 3)(x + 2)}$

b) Décomposition en Éléments Simples de $\frac{3x^3 - x + 5}{(x - 5)(x + 4)}$

c) Décomposition en Éléments Simples de $\frac{-3x^3 - 2x^2 - x}{(x^2 + x + 1)}$

d) Décomposition en Éléments Simples de $\frac{-4x^2 + 7}{(x + 2)(x - 1)^2}$

e) Décomposition en Éléments Simples de $\frac{9x^7 - 108x^6 + 443x^5 - 824x^4 + 891x^3 + 200x^2 - 579x + 1509}{(3x^2 - 2x + 5)(x^3 - 9x^2 + 15x + 25)}$

Calculs de limites

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 - 5$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} -x^3 + 18$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1, 5x - 4, 5$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^4 - x^3 - 7x - 7$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^5 + 37x^4 - 3,92x^3 - \pi x^2 + 2x - 1, 5$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{58}{x} - 12$

g) $\lim_{x \rightarrow 4} 2x^2 - 4x + 3$

h) $\lim_{x \rightarrow -10} -x^3 + 4x^2 - 3x - 3$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x + 7}{2x^2 + 1, 2x - 23}$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1741x - 4}{-5x^3 - 2x + 0, 5}$

k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 6x - 8}{-3x^4 - 3x^3 + x - 7}$

l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-7x^3 + 2x - 5}{-6x + 6}$

Dérivées

a) $x^2 - 4$

b) $-3x^3 + x$

c) $-2x^5 + x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 10x - 10$

d) $-4\sqrt{x}$

e) $\frac{5\sqrt{3x}}{2}$

f) $-2x \cos(x)$

g) $\frac{8 \sin(x)}{-2 \cos(x)}$

h) $-\frac{1}{3}e^{6x}$

i) $\frac{-2e^{4x}}{2\sqrt{2x}} + \frac{3x}{9}\sin(10x)$

Intégrales

a) $\int_1^2 -3x^2 dx$

b) $\int_4^2 2x^3 - 8 dx$

c) $\int_{-1}^2 x^4 - 2x^2 + 2x - 5 dx$

d) $\int_2^3 4\sqrt{x} - 4x dx$

e) $\int_4^8 \frac{5x^2}{3x} dx$

f) $\int_0^1 -5 \sin(x) dx$

g) $\int_0^{-\pi} \frac{3 \cos(x)^2}{-6 \cos(x)} dx$

h) $\int_1^{10} 4e^{-3x} dx$

i) $\int_0^{0,1} e^{3x} \sin(6x) + \frac{\sqrt{x}}{10} dx$

Suites

Pour toutes les suites suivantes commençant à l'indice 1, étudier la monotonie et leurs bornes.

a) $\frac{2}{n}$

b) $\frac{(-1)^n}{n}$

c) \sqrt{n}

d) $\frac{n}{2^n}$

e) $\frac{n-1}{n}$

f) $\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}$

g) $\frac{4^n}{2^n+100}$

h) $(-1)^n \sqrt{n}$

i) $\log\left(\frac{2n}{n+1}\right)$

Séries

Toutes les séries suivantes convergent. Trouver leurs sommes.

- a) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
- b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(2k+2)}$
- c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{100^k}$
- d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^k}$
- e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k + 4^k}{5^k}$
- f) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{25}{10^k} - \frac{6}{100^k}$

Solutions

Opérations entre matrices

a) $\begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 72 & 72 \\ 1 & -31 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -81,5 \\ 33,8 \\ -1,8 \end{bmatrix}$

d) $[20]$

e) $\begin{bmatrix} -21 & 81 & -9 & 86 \\ 55 & 60 & -5 & 98 \\ -101 & 107 & -45 & 28 \end{bmatrix}$

f) Addition impossible, les deux matrices n'ont pas les mêmes dimensions.

g) Soustraction impossible, les deux matrices n'ont pas les mêmes dimensions.

h) $\begin{bmatrix} -28 & 19 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 9 \\ -9,5 \\ 8,5 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 11 & 21 & -10 \\ -4 & -38 & -24 \\ -2 & -16 & -9 \end{bmatrix}$

k) Multiplication impossible, la largeur de la première matrice n'est pas égale à la hauteur de la seconde.

Déterminants

a) 2

b) -2

c) 30

d) 0 (Ce résultat peut-être obtenu sans calcul ; en effet la deuxième ligne est proportionnelle à la première, ce qui implique un déterminant nul)

e) -10150

f) 0 (Ce résultat peut-être obtenu sans calcul ; en effet la première colonne est proportionnelle à la seconde, ce qui implique un déterminant nul)

g) -20

h) -189,677095271

i) -197

j) 147

k) 0 (Ce résultat peut-être obtenu sans calcul ; en effet la troisième ligne ne contient que des éléments nuls, ce qui implique un déterminant lui aussi nul)

Inversion de matrices

a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $[1]$

c) Inversion impossible, on constate que les deux lignes sont proportionnelles, ce qui implique un déterminant nul, et indique que la matrice n'est pas inversible.

d) $\begin{bmatrix} -25 & -11 & 79 \\ -7 & -3 & 22 \\ -9 & -4 & 28 \end{bmatrix}$

e) Inversion impossible, le déterminant est nul puisque la troisième colonne est égale à l'addition entre la première multipliée par deux et la seconde. Cette propriété étant difficilement visible sans calcul, il est préférable de vérifier la valeur du déterminant pour s'en rendre compte.

f) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -55 & -91 & 8 & 4 \\ -4 & -7 & 0 & 0 \\ -57 & -97 & 5 & 4 \\ -14 & -24 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Opérations entre polynômes

a) $x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 111x^2 - 2x + 1$

b) $-42x^5 + 4x^3 + 32x^2 + 6x - 1$

c) $2x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 12x$

d) Quotient : $x^2 - 1$

Reste : $-10x + 2$

e) Quotient : $34x^2 - 65x + 164$

Reste : $162x^3 + 228x^2 - 982x + 2$

f) Quotient : 0

Reste : $-2x^3 - 6$ (Ce résultat peut-être obtenu sans calcul ; en effet le degré du dividende est strictement inférieur à celui du diviseur)

g) Quotient : $3x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 228x^2 + 911x + 3642$

Reste : 14567

Décompositions en Éléments Simples

a) $\frac{-1}{(x-3)} + \frac{-1}{(x+2)}$

b) $3x + 3 + \frac{125}{(x-5)} + \frac{61}{(x+4)}$

c) $-3x + 1 + \frac{x-1}{(x^2+x+1)}$

d) $\frac{-1}{(x+2)} + \frac{-3}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$

e) $3x^2 - 7x + 12 + \frac{-87}{700}x + \frac{19}{100} + \frac{13}{(x+1)} + \frac{67}{(x-5)} + \frac{-11}{(x-5)^2}$

Calculs de limites

a) $+\infty$

b) $-\infty$

c) $-\infty$

d) $+\infty$

e) $+\infty$

f) -12

g) 19

h) 1427

i) 2

j) 0

k) -3

l) $-\infty$ à gauche, ∞ à droite

Dérivées

a) $2x$

b) $-9x^2 + 1$

c) $-10x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 20x - 10$

d) $\frac{-2}{\sqrt{x}}$

e) $\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{x}}$

f) $2x \sin(x) - 2 \cos(x)$

g) $-4 \left(\frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} + 1 \right)$

h) $-2e^{6x}$

i) $\frac{10x \cos(10x)}{3} - \frac{2\sqrt{2} e^{4x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2} e^{4x}}{4x\sqrt{x}} + \frac{\sin(10x)}{3}$

Intégrales

a) $[-x^3]_1^2 = -7$

b) $\left[\frac{1}{2}x^4 - 8x\right]_4^2 = -104$ Attention, la fonction change de signe sur l'intervalle sélectionné, il faut le prendre en compte.

c) $\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 5x\right]_{-1}^2 = -\frac{57}{5}$ Attention, la fonction change de signe sur l'intervalle sélectionné, il faut le prendre en compte.

d) $\left[-2x^2 + \frac{8x\sqrt{x}}{3}\right]_2^3 = 8\sqrt{3} - \frac{16\sqrt{2}}{3} - 10$

e) $\left[\frac{5}{6}x^2\right]_4^8 = 40$

f) $[5 \cos(x)]_0^1 = 5 \cos(1) - 5$

g) $\left[-\frac{\sin(x)}{2}\right]_0^{-\pi} = 0$

h) $\left[-\frac{4}{3}e^{-3x}\right]_1^{10} = \frac{4}{3}(e^{-3} - e^{-30})$

i) $\left[-\frac{2 \cos(6x) - \sin(6x)}{15}e^{3x} + \frac{x\sqrt{x}}{15}\right]_0^{0,1} = -\frac{2 \cos(0,6) - \sin(0,6)}{15}e^{0,3} + \frac{0,1\sqrt{0,1}}{15} + \frac{2}{15}$

Suites

a) La suite est strictement décroissante, est minorée par 0, et est majorée par 2.

b) La suite n'est pas monotone, est minorée par -1 , et est majorée par $\frac{1}{2}$.

c) La suite est strictement croissante, est minorée par 1, et n'est pas majorée.

d) La suite est décroissante, est minorée par 0, et est majorée par $\frac{1}{2}$.

e) La suite est strictement croissante, est minorée par 0, et est majorée par 1.

f) La suite est strictement croissante, est minorée par $\frac{4}{5}\sqrt{5}$, et est majorée par 2.

g) La suite est strictement croissante, est minorée par $\frac{2}{51}$, et n'est pas majorée.

h) La suite n'est pas monotone, n'est pas minorée, et n'est pas majorée.

i) La suite est strictement croissante, est minorée par 0, et est majorée par $\log(2)$.

Séries

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{400}{33}$

d) $\frac{5}{6}$

e) $\frac{15}{2}$

f) $\frac{2150}{9}$